Yoccoz puzzle の combinatorics について(複素力学系に関する諸問題)

AUTHOR(S):

榊原, 宏紀

数理解析研究所講究録
959巻 1996年 42-50

Yoccoz puzzle の combinatorics について

東工大理工学研 榊原 宏紀(Hironori Sakakihara)

1 Notations

V, W$\subset$C$_\infty$ に対して ,clV$\subset$ intWが成り立つときV$\subset\subset$Wと書き、

$orb_n(z_0)=\{f^m(z_0)\}_{m=1}^n$,$orb(z_0)=\{f^n(z_0)\}_{n=1}^\infty$ と書く。

2 Polynomials

f:polynomial , deg$f=d\geq 2$ を考える。

$D(\infty)$は、$basin\ of\ infinity$、つまり、$\{z\in$ C$_\infty: f^n(z)\longrightarrow\infty(n\to\infty)\}$とし、$K(f)=$ C$_\infty\backslash D(\infty)$は、$filled\ Juliaset$ とする。よく知られているように、$J(f)=\partial D(\infty)=\partial K(f)$である。

以後、$J(f)$は連結と仮定する。

fに対して、$Böttcher\ coodinate$と呼ばれるU_fから$\{z:|z|>r_f\geq 1\}$ へのconformal mapB_fが存在して,$B_f(f(z))=(B_f(z))^d$, $B_f(z)=z+o(1)(z\to\infty)$が成立する。ここで、$U_f$は$\infty$の近傍である。

今、$J(f)$は連結としているから、r_f=1 ととれる。

角θをもつ$external\ ray$を$\left\{re^{i\theta}:r_f<r<\infty\right\}$の$B_f-$preimage、level h の$equipotential$を$\left\{he^{i\theta}:0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$の$B_f-$preimageでそれぞれ定義する。

角θをもつ$external\ ray$をR_θと表すと、$f(B_f^{-1}(z))=B_f^{-1}(z^d)$であるから、$f(R_\theta)=R_{d\theta}$となることがわかる。

また、equipotentialとは、言い換えれば、∞を極にもつ$D(\infty)$上の$Green$関数のlevel curveである。

Theorem. 1

a をrepelling periodic pointとすると、a についているexternal raysが存在し、それらは高々有限個である。

もちろん、$a \in J(f) = \partial K(f)$ である。これをもう少し詳しくみると、

Theorem. 2

f を次数2以上のpolynomialとし、$K(f)$ は連結とする。

そのとき、$Th.1$ で得られたexternal raysは巡回的に置換される。

つまり、a についているexternal raysを $R_{t(i)}(0 \leq t(0) <, .. < t(n-1) < 1)$ とすると、ある整数 m が存在して、f は $R_{t(i)}$ を $R_{t(i')}$ に写す。ここで、$i' = i + m \ (mod\ n)$ であり、各 $t(i)$ は2 π を無視したexternal raysの角を表しておけばよい。

このとき、$\frac{m}{n}$ を $rotation\ number$ という。

rotation numberとは、その名前の通り、rotationの割合を表している。それを明らかにするのが次の定理である。

Theorem. 3

z_0 を $f'(z_0) = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$ なるparabolic fixed pointとすると、z_0 でのrotation numberは、$\dfrac{m}{n}$ である。

parabolic fixed pointのときは $|f'(z_0)|=1$ だから $f'(z_0) = e^{2\pi i\theta}, \theta \in [0,1]$ と書け、attracting petalsを考えれば、ある種の回転になっていることは理解しやすい。

しかし、$|f'(z_0)| > 1$ となるrepelling fixed fointのときは、$Th.3$ のようにはいかない。

repelling fixed pointのときのその点での微分係数とrotation numberの関係を示したのが次のYoccoz inequalityである。

Yoccoz inequality

z をrepelling fixed pointとすると、

$$\frac{Reg(z)}{|g(z) - 2\pi iq/p|} \geq \frac{mq}{2\log d}$$

ここで、$m = g.c.d(p,q)$、$g(z)$ は $\log f'(z)$ の branch である。

この不等式から、$g(z)$ は $2\pi i\frac{q}{p}$ で虚軸に接する半径 $\frac{mq}{\log d}$ の closed disk 内にあることがわかる。

つまり、repelling fixed point の場合でもその点の微分係数と rotation number とは ”ある意味で” 近いと思ってよい。

新たに、記号を導入する。

$R(a) := \{a$ についている external rays の union$\}$

$R(\tilde{a}) := \bigcup_{k=1}^{p-1} R(f^k(a)) \quad (p:$ 周期$)$

3 Quadratic family

ここでは、特に $f(z) \equiv P_c(z) = z^2 + c$ について考える。

Proposition .4

$\tilde{a} = \{a_k\}_{k=1}^{p-1}$ を repelling periodic cycle とし、各 a_k についている external rays は少なくとも2つあるとする。

そのとき、次のことが成り立つ。

(1) critical value c を含む $\mathbb{C}_\infty \backslash R(\tilde{a})$ の component S_1 は2つの external rays によって境界づけられた secter である。

(2) critical point 0 を含む $\mathbb{C}_\infty \backslash f^{-1}(R(\tilde{a}))$ の component S_0 は4つの external rays によって境界づけられる。

それらの2つは a_k、他の2つは $-a_k$ についている。

4 Douady − Hubbard polynomial − like map

U′, U を topological disk、すなわち、単連結な領域で、U′⊂⊂U とする。

f : U′ →U が d − fold branched covering のとき、f を次数 d の *DH polynomial − like map* という。

特に、次数2のとき、*DH quadratic like map* という。

polynomial like map fに対して、*filled Juliaset*、*julia set*を次のように定めればよいことがわかる。

$K(f) = \{z : f^n(z) \in \mathrm{U}', n = 1, 2, ...\}$

$J(f) = \partial K(f)$

この節の残りで、polynomial like mapsの性質をいくつか述べる。

polynomial like mapはその名前の通り、polynomialらしきものである。もちろん、polynomialsはpolynomial like mapsである。実際、∞がsuperattracting fixed pointであるから、ある領域に制限すればよい。

polynomialsに対してはよく知られているつぎのことが、polynomial like mapsに対しても成り立つ。

$K(f)$,$J(f)$が連結であることと有限なcritical pointsがすべて$K(f)$に含まれることとは必要 十分である。

２つのpolynomial like maps$f$、gに対して、hがfとgのquasiconformal conjugacyであるとは、hは$K(f)$の近傍から$K(g)$の近傍への写像で、$h \circ f = g \circ h$が成り立つきをいう。

fとgが*hybrid equivalent*であるとは、$K(f)$のほとんど至るところ$\bar{\partial} h = 0$となるときをいう。

Straightening Theorem

(1) 次数dのpolynomial like map$f$は、次数dのあるpolynomialにhybrid equivalentである。

(2) (1)において$K(f)$が連結のとき、fとhybrid equivalentなpolynomialはaffine conjugacyを除いて一意に決まる。

(3) 連結なJuliasetをもつquadratic like mapはz^2+cの形のpolynomialとhybrid equivalentで、その対応は一意的である。

5 DH renormalization

ここからは次数を２に限って考え、critical pointは0とする。

fをquadratic like mapとし、$\tilde{\alpha}$をdividing repelling cycleとする。

dividing point とは、$K(f)\backslash a$ が dividing となるときをいう。もっといえば、その点に２つ以上の external rays が存在するときである。

$R = R(\tilde{a})$ とおき、Rと symmetric な rays を $R' = -R$で表し、Eを任意の equipotential とする。

Ωを critical point を含む$\mathbb{C}_\infty\backslash(E \cup R \cup R')$ の component とする。このΩは$Th.3(2)$ によって得られるものである。

さらに、pは rays の周期とし、Ω'は$f^{-p}(\Omega)$ の aについている component とする。ここで、$a \in \tilde{a}$である。

$\Omega' \ni 0$のとき、$f^p : \Omega' \to \Omega$は double covering map になる。

quadratic like map$f$が *DH renormalizable*(くり込み可能) であるとは、上のように、repelling cycle $\tilde{a}$が存在して、$0 \in \Omega'$であって、$f^{pn}(0) \in \Omega', n = 1, 2, ...$となるときをいう。

さらに、fが *immediately DH renormalizable* であるとは、DH renormalizable であって、aがfの dividing fixed point としてとれるときをいう。

6 Yoccoz puzzle

fを quadratic polynomial とし、２つの fixed points α、βは repelling とする。

さらに、αは dividing fixed point で、rotation number は $\frac{q}{p}(p > 1)$ とする。

Eを$K(f)$ に十分近い equipotential とすると、$K(f)$ を含むEに囲まれた領域はαについている external rays によって p 個の領域に分割される。

その分割によってできる p 個の領域を$Y_i^{(0)}$ $(i = 0, .., p-1)$ とおいて *depth zero* の *puzzle pieces* という。

depth n の *puzzle pieces* $Y_i^{(n)}$ を$f^{-n}(Y_k^{(0)})$ の connected component とする。

ここで、critical point の iterates は、αにならないとする。

そのとき、critical point を含む唯一つの puzzle piece がとれるので、その puzzle piece を$Y^{(n)} = Y_0^{(n)}$とおき、critical という。

もし、仮に、critical point の iterates がαになったとすると、critically finite になる。

このとき Juliaset は locally connected になることがわかっている。

$M(f) := \{$すべての`level`の`puzzle pieces`$\}$とすると、`Markov property`を満たす。つまり、

(1) 任意の2つの`puzzle pieces`は、交わりのない内部をもつか、`depth`の大きい`piece`が`depth`の小さい`piece`に含まれているかである。

(2) 任意の`puzzle piece`$Y_i^{(n)}$に対して、ある整数kが存在して、$f : Y_i^{(n)} \to Y_k^{(n-1)}$である。この写像は$Y_i^{(n)}$が`critical`かどうかによって`double covering`か、`conformal`かになっている。

Theorem.5

fは`quadratic polynomial`とし、2つの`fixed points`は`repelling`とする。

fが$DH\ non-renormalizable$であるなら、

$$\sum_{n=0}^{\infty} mod(Y^{(n)} \backslash Y^{(n+1)}) = \infty$$

このことから、

$$diam Y^{(n)} \to 0 (n \to \infty)$$

Corollary.6

$Th.5$が成り立つとき、$J(f)$は`locally connected`となる。

$Cor.6$の"$Th.5$が成り立つとき"というのは少し曖昧だが、重要なのは$Y^{(n)}$の$diameter$が0にいくことである。

また、`critical puzzle piece`である$Y^{(n)}$だから意味がある。

7 Principal nest

ここでも、fは`quadratic polynomial`とし、その2つの`fixed points`は`repelling`としておく。

Wを閉集合とし、あるzに対して$f^l(z) \in$ Wとする。

$orb_l(z)$に沿うWの`pull back` $\mathrm{W}_0, \mathrm{W}_1, ..., \mathrm{W}_l$を次のように定義する。

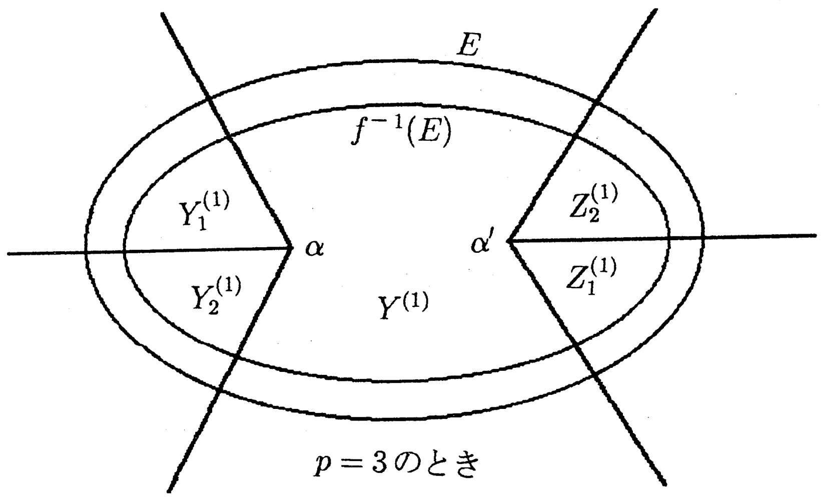
$W_0 = W, W_{-1} \ni f^{l-1}(z), \ldots, W_{-l} \ni z$、各 W_{-k}は$f^{l-k}(z)$を含む$f^{-1}(W_{-k+1})$の component の closure とする。

$z \in int\,W$のとき、$int\,W$への$orb(z)$の first return に対応する pull back ということにする。

$Sec.6$で考えた depth 1 の puzzle pieces に注目する。

fの depth 1 の puzzle pieces を$Y^{(1)}, Y_i^{(1)}, Z_i^{(1)} (i = 1, .., p-1)$とおく。

ここで、$Y_i^{(1)}$は dividing repelling fixed point αについている puzzle pieces とし、$Z_i^{(1)}$は αと symmetric な点 α'についている puzzle pieces とする。



$p = 3$のとき

$f^{-1}(E)$によって cut された$f^p(Y^{(1)})$は$Y^{(1)}$と$Z_i^{(1)}(i = 1, .., p-1)$の union であるから, 次の2つが考えられる。

(1) $f^{kp}(0) \in Y^{(1)} (k = 1, 2, ..)$

(2) $t > 0, j > 0$が存在して、$f^{tp}(0) \in Z_j^{(1)}$

(1)のとき、fは*immediately DH renormalizable*であり、*principal nest*を$Y^{(0)}$で定義する。

ここから、(2)のときについて考え、*principal nest* $Y^{(0)} \supset V^0 \supset V^1 \supset \cdots$を構成する。

tを$f^{tp}(0) \in Z_i^{(1)}$なる first moment とする。

V^0を$orb_{tp}(0)$に沿うpull backとし、V^{n+1}を$int\, V^n$へのcritical pointのfirst returnに対応するpull backとする。

critical pointが$intY^{n+1}$へreturn backしないとき、*combinatorically non* − *recurrent*といい、principal nestは有限である。

そうでないとき、つまり、*combinatorically recurrent*のとき、principal nestは無限となる。

$l = l(n)$を$int\, V^n$へのcritical pointのfist return timeとおくと、

$g_n = f^{l(n)} : V^n \to V^{n-1}$はtwo − to − one branched coveringとなる。

level $n-1$へのreturnが*central*であるとは、$g_n(0) \in V^n$のときをいう。いいかえれば、$l(n) = l(n+1)$となるときである。

level $n, n+1, .., n+N-1 (N \geq 1)$が*central cascade*を形成するとは、

level $n, n+1, .., n+N-2$へのreturnがcentralであって、level $n+N-1$へのreturnがnon − centralのときをいう。

このとき、$g_{n+k}|_{V^{n+k}} = g_{n+1}|_{V^{n+k}}\ (k = 1, .., N)$であって、$g_{n+1}(0) \in V^{n+N-1} \setminus V^{n+N}$である。$g_{n+k}|_{V^{n+k}} = g_{n+1}|_{V^{n+k}}\ (k = 1, .., N)$は$g_{n+1}, .., g_{n+N}$がquadrartic like mapとして同じであることを意味する。

level $n, n+1, .., n+N-1 (N \geq 1)$がcentral cascadeを形成し、さらに、level $n-1$へのreturnがnon − centralのとき、*maximal*という。

principal nestはmaximal cascadesのunionである。

maximal cascadesの数をfの*height*といい、$\chi(f)$で表す。ただし、fがimmediately renormalizableのときは、$\chi(f) = -1$とする。

8 DH renormalization and central cascades

Proposition.7

quadratic like map$f$がrenormalizableであることと、$\chi(f)$が有限になることとは必要十分である。

9 Increasing of moduli

Theorem.8

principal nest{ V^n} 内の non − central level を count したものを $n(k)$ とすると、

$$modA^{n(k)+1} \geq Bk$$

ここで、$A^n = \mathrm{V}^n \setminus \mathrm{V}^{n+1}, B = B(\mu)$ は $\mu = modA^1$ にのみによる定数である。

*Prop.*7 から、renormalizable でなければ maximal cascades の個数が無限になることがわかる。つまり、$modA^{n(k)}$ の和は Bk の和以上の速さで無限大にいくことになる。

Reference

[1] M.Lyubich;Dynamics of quadratic polynomials,combinatorics and geometry of the Yoccoz puzzle. MSRI preprint.1995

[2] J.H.Hubbard;Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci:three theorems of J.C.Yoccoz.In:"Topological Metheods in Mordern Mathematics,A Symposium in Honor of John Milnor's 60'th Birthday",Pulish or Perish.1993

[3] L.Goldberg & J.Milnor;Fixes points of polynomial maps.Part 2.Fixed point portraits. *Ann.Sc.Ec.Norm.Sup.*, 26(1993)

[4] A.Douady & J.H.Hubbard;On the dynamics of polynomial − like maps. *Ann.Sc.Ec.Norm.Sup.*, 18(1985)